



ce
pre
UNI

Trigonometría

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

**CICLO
PRE
2024-I**



INTRODUCCIÓN

En este capítulo haremos un estudio de la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (B \neq 0) \dots (1)$$

Consideraremos el caso en que la ecuación (1) contiene el término xy , es decir, el caso en que $B \neq 0$. Demostraremos que, mediante una rotación de los ejes coordenados, siempre es posible transformar la ecuación (1) en otra de la forma

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'(x') + E'(y') + F' = 0$$

en la que, por lo menos, uno de los coeficientes A' o C' es diferente de cero, y no aparece el término $x'y'$.

TRANSFORMACIÓN DE LA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO POR ROTACIÓN DE LOS EJES

Dada la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (B \neq 0) \dots (1)$$

y aplicando las ecuaciones de transformación por rotación

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(\theta) - y' \sin(\theta) \\ y &= x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta) \end{aligned}$$

al reemplazar en (1), se obtiene

$$\begin{aligned} &A(x' \cos(\theta) - y' \sin(\theta))^2 + B(x' \cos(\theta) - y' \sin(\theta))(x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta)) \\ &+ C(x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta))^2 + D(x' \cos(\theta) - y' \sin(\theta)) + E(x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta)) + F = 0 \end{aligned}$$

Luego de desarrollar y agrupar términos, resulta

$$A'(x')^2 + B'(x')(y') + C'(y')^2 + D'(x') + E'(y') + F' = 0$$

en donde,

$$A' = A \cos^2(\theta) + B \sin(\theta) \cos(\theta) + C \sin^2(\theta)$$

$$D' = D \cos(\theta) + E \sin(\theta)$$

$$B' = B \cos(2\theta) - (A - C) \sin(2\theta)$$

$$E' = E \cos(\theta) - D \sin(\theta)$$

$$C' = A \sin^2(\theta) - B \sin(\theta) \cos(\theta) + C \cos^2(\theta)$$

$$F' = F$$

TEOREMA

La ecuación de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; B \neq 0$ puede ser transformada en otra de la forma

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'(x') + E'(y') + F' = 0 \quad (\text{sin término mixto } (x'y'))$$

haciendo girar los ejes coordenados un ángulo agudo de medida θ tal que

$$\cot(2\theta) = \frac{A - C}{B} \quad (0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

Demostración

Se sabe que la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; B \neq 0$ puede ser transformada en $A'(x')^2 + B'(x')(y') + C'(y')^2 + D'(x') + E'(y') + F' = 0$

$$\text{Sea } B' = 0 \Rightarrow B\cos(2\theta) - (A - C)\sin(2\theta) = 0$$

$$\Rightarrow B\cos(2\theta) = (A - C)\sin(2\theta) \quad \therefore \cot(2\theta) = \frac{A - C}{B}$$

Nota:

$$\text{Si } A = C \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

PROBLEMA 1

La medida del ángulo agudo que deben de rotar los ejes coordenados XY , para eliminar el término $x'y'$ de la ecuación transformada de $2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 - 3 = 0$, es θ . Calcule el valor de θ .

A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

CLAVE: D

PROBLEMA 2

La medida del ángulo agudo que deben de rotar los ejes coordenados XY , para que la ecuación $xy = 4$ se transforme en otra que no contenga el término mixto $x'y'$ es θ . Calcule el valor de θ .

A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

CLAVE: C

PROBLEMA 3

Calcule la medida del ángulo de rotación de los ejes coordenados XY , tal que la ecuación transformada en el nuevo sistema no tenga el término $x'y'$.

$$\sqrt{3} \csc(20^\circ) x^2 + 3xy + \sec(20^\circ) y^2 = 6$$

A) $\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$

B) $\arctan\left(\frac{3}{5}\right)$

C) $\arctan\left(\frac{1}{4}\right)$

D) $\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$

E) $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$

CLAVE: D

TEOREMA DE LAS INVARIANTES

Dada la ecuación general de 2do grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$; $B \neq 0$ la cual, mediante una rotación, es transformada en

$$A'(x')^2 + B'(x')(y') + C'(y')^2 + D'(x') + E'(y') + F' = 0$$

se cumplen las siguientes relaciones:

$$A' + C' = A + C$$

$$(B')^2 - 4(A')(C') = B^2 - 4(A)(C)$$

$$(D')^2 + (E')^2 = D^2 + E^2$$

$$F' = F$$

Nota 1: El número $B^2 - 4(A)(C)$ se denomina discriminante o indicador de la ecuación general de 2do grado y se denota por Δ o I :

$$\Delta = I = B^2 - 4(A)(C)$$

Nota 2: Los números: $A + C$; $B^2 - 4AC$; $D^2 + E^2$; F son denominados invariantes por rotación.

Demostración:

Partimos de la ecuación general de 2do grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; B \neq 0$$

que, mediante una transformación por rotación de ejes, se expresa como

$$A'(x')^2 + B'(x')(y') + C'(y')^2 + D'(x') + E'(y') + F' = 0$$

donde se cumple que:

$$A' = A\cos^2(\theta) + B\sin(\theta)\cos(\theta) + C\sin^2(\theta)$$

$$B' = B\cos(2\theta) - (A - C)\sin(2\theta)$$

$$C' = A\sin^2(\theta) - B\sin(\theta)\cos(\theta) + C\cos^2(\theta)$$

$$D' = D\cos(\theta) + E\sin(\theta)$$

$$E' = E\cos(\theta) - D\sin(\theta)$$

$$F' = F$$

Entonces: $A' = A\cos^2(\theta) + B\sin(\theta)\cos(\theta) + C\sin^2(\theta)$
 $C' = A\sin^2(\theta) - B\sin(\theta)\cos(\theta) + C\cos^2(\theta)$ (+)

$$A' + C' = A(\underbrace{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}_1) + C(\underbrace{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}_1)$$

$$\therefore A' + C' = A + C$$

También:

$$D' = D\cos(\theta) + E\sin(\theta) \Rightarrow (D')^2 = \underline{D^2\cos^2(\theta)} + 2DE\sin(\theta)\cos(\theta) + \underline{E^2\sin^2(\theta)}$$

$$E' = E\cos(\theta) - D\sin(\theta) \Rightarrow (E')^2 = \underline{E^2\cos^2(\theta)} - 2DE\sin(\theta)\cos(\theta) + \underline{D^2\sin^2(\theta)}$$

Sumamos: $(D')^2 + (E')^2 = D^2(\underbrace{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}_1) + E^2(\underbrace{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}_1)$

$$\therefore (D')^2 + (E')^2 = D^2 + E^2$$

Además: $F' = F$

También se tiene que:

$$B' = B\cos(2\theta) - (A - C)\sin(2\theta) \Rightarrow (B')^2 = (B\cos(2\theta) - (A - C)\sin(2\theta))^2$$

$$A' = \frac{1}{2}((A + C) + (A - C)\cos(2\theta) + B\sin(2\theta))$$

$$C' = \frac{1}{2}((A + C) - (A - C)\cos(2\theta) - B\sin(2\theta))$$

$$\Rightarrow 4(A')(C') = (A + C)^2 - ((A - C)\cos(2\theta) + B\sin(2\theta))^2$$

$$\Rightarrow (B')^2 - 4(A')(C') =$$

$$= \underbrace{(B\cos(2\theta) - (A - C)\sin(2\theta))^2 + ((A - C)\cos(2\theta) + B\sin(2\theta))^2}_{B^2(\cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta)) + (A - C)^2(\sin^2(2\theta) + \cos^2(2\theta))} - (A + C)^2$$

$$B^2(\cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta)) + (A - C)^2(\sin^2(2\theta) + \cos^2(2\theta))$$

$$\Rightarrow (B')^2 - 4(A')(C') = B^2 + \underbrace{(A - C)^2 - (A + C)^2}_{-4AC}$$

$$\therefore (B')^2 - 4(A')(C') = B^2 - 4AC$$

PROBLEMA 4 (Material de estudio, ejercicio 289)

Mediante una rotación de los ejes coordenados XY, la ecuación $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6$, se transforma en:

A) $2(x')^2 + (y')^2 = 6$

B) $3(x')^2 + (y')^2 = 6$

C) $4(x')^2 + (y')^2 = 6$

D) $5(x')^2 + (y')^2 = 6$

E) $6(x')^2 + (y')^2 = 6$

CLAVE: E**PROBLEMA 5 (Material de estudio, ejercicio 290)**

Dada la ecuación de la cónica $41x^2 - 24xy + 34y^2 = 25$, calcule su excentricidad.

A) $1/3$

B) $1/2$

C) $\sqrt{2}/2$

D) $\sqrt{3}/2$

E) $\sqrt{2}/4$

CLAVE: C

PROBLEMA 6 (Material de estudio, ejercicio 292)

Dada la ecuación de la cónica $8x^2 - 12xy + 13y^2 = 68$, calcule la distancia (en u) entre sus focos.

A) $2\sqrt{11}$

B) $4\sqrt{5}$

C) $4\sqrt{7}$

D) $2\sqrt{17}$

E) $2\sqrt{13}$

CLAVE: E**PROBLEMA 7 (Material de estudio, ejercicio 293)**

Dada la ecuación de la cónica $2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 = 10$, calcule la longitud de su lado recto (en u).

A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

B) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

C) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

D) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

E) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

CLAVE: C

PROBLEMA 8

Dada la ecuación de la elipse $\mathcal{E}: 7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$, con vértices en $V_1(n; m)$ y $V_2(p; q)$. Calcule $p \cdot n + m \cdot q$

A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5 **CLAVE: D****PROBLEMA 9**

Dada la ecuación de la elipse $7x^2 + 2xy + 4y^2 + 3x + 2y - 1 = 0$. Por medio de una rotación de ejes se elimina el término $x'y'$, obteniéndose la ecuación $A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'(x') + E'(y') - 1 = 0$. Calcule $\sqrt{2(A' + C') - (D'E')^2}$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

CLAVE: C

ANÁLISIS DEL DISCRIMINANTE O INDICADOR DE LA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Sabemos que la ecuación de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 ; B \neq 0$$

puede ser transformada, mediante una rotación de los ejes, en

$$A' (x')^2 + C' (y')^2 + D'(x') + E'(y') + F' = 0 \quad (B' = 0, \text{ sin término mixto } x'y')$$

Por teorema de invariantes: $(B')^2 - 4(A')(C') = B^2 - 4AC$

Como $B' = 0 \Rightarrow B^2 - 4AC = -4(\mathbf{A}')(\mathbf{C}')$

entonces el signo que adopta $\Delta = I = B^2 - 4AC$

es el mismo signo que asume $\Delta = I = -4(\mathbf{A}')(\mathbf{C}')$

$$\Rightarrow \begin{cases} (A')(C') > 0 \Rightarrow B^2 - 4AC < 0 \\ (A')(C') = 0 \Rightarrow B^2 - 4AC = 0 \\ (A')(C') < 0 \Rightarrow B^2 - 4AC > 0 \end{cases}$$

Entonces, en la ecuación: $A' (x')^2 + C' (y')^2 + D'(x') + E'(y') + F' = 0$

* Si $(A')(C') > 0$, la ecuación podría representar una **elipse** o algún caso degenerado de ella. $(A' C' > 0 \Rightarrow B^2 - 4AC < 0)$

Si $B^2 - 4AC < 0$, la ecuación se denomina del tipo o género elipse. Puede representar una elipse, un punto o no poseer algún tipo de representación en el plano cartesiano.

Por ejemplo, en la ecuación $3x^2 - xy + 2y^2 - 2x - 5y - 1 = 0$ calculamos su discriminante o indicador:

$$I = B^2 - 4AC = (-1)^2 - 4(3)(2) = -23 < 0$$

Solo podemos afirmar que la ecuación es del género o tipo elipse, más no precisar aún si se trata de una elipse.

- * Si $(A')(C') = 0$, la ecuación podría representar una **parábola** o algún caso degenerado de ella. $(A' C' = 0 \Rightarrow B^2 - 4AC = 0)$

Si $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación se denomina del tipo o género parábola. Puede representar una parábola, dos rectas paralelas, dos rectas coincidentes o no poseer representación en el plano cartesiano.

Por ejemplo, en la ecuación $x^2 - 6xy + 9y^2 - 3x + 6y - 7 = 0$ calculamos su discriminante o indicador:

$$I = B^2 - 4AC = (-6)^2 - 4(1)(9) = 0$$

Solo podemos afirmar que la ecuación es del género o tipo parábola, más no precisar aún si se trata de una parábola.

* Si $(A')(C') < 0$, la ecuación podría representar una **hipérbola** o algún caso degenerado de ella. $(A'C' < 0 \Rightarrow B^2 - 4AC > 0)$

Si $B^2 - 4AC > 0$, la ecuación se denomina del tipo o género hipérbola. Puede representar una hipérbola o dos rectas secantes.

Por ejemplo, en la ecuación $x^2 - 6xy + 2y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$ calculamos su discriminante o indicador:

$$I = B^2 - 4AC = (-6)^2 - 4(1)(2) = 28 > 0$$

Solo podemos afirmar que la ecuación es del género o tipo hipérbola, más no precisar aún si se trata de una hipérbola.

**PROBLEMA 10 (EXAMEN ADMISIÓN UNI 2016 - I)**

La ecuación de la cónica que sigue: $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}x - 8y + 32 = 0$ corresponde a:

A) Hipérbola

B) Elipse

C) Circunferencia

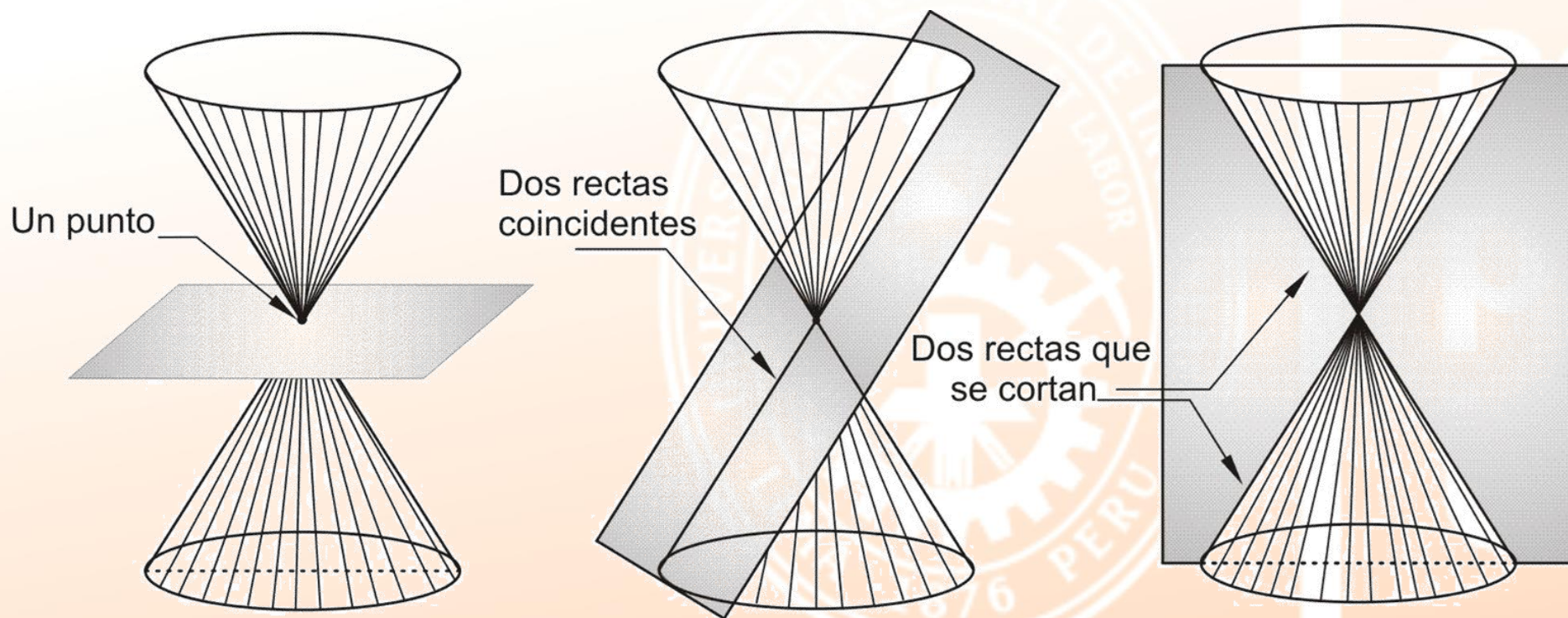
D) Parábola

E) Punto

CLAVE: D

CÓNICAS DEGENERADAS

En algunos casos se presentará los casos excepcionales de un punto, dos rectas coincidentes, dos rectas paralelas o dos rectas que se cortan. Estos casos excepcionales se llaman también formas límite de las cónicas o cónicas degeneradas.



Dada la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; B \neq 0$$

una situación de cónica degenerada se presenta cuando la ecuación se puede factorizar en dos factores lineales.

Para confirmar si la expresión es factorizable de esta manera, se procede a ordenar la ecuación como si fuera un polinomio decreciente respecto a **x**:

$$A\mathbf{x}^2 + (By + D)\mathbf{x} + (Cy^2 + Ey + F) = 0 \dots (\alpha)$$

formando una ecuación de segundo grado **respecto a x**. Para que esta ecuación sea factorizable, es necesario que su discriminante adopte la forma $(ay + b)^2$

Si el discriminante de la ecuación (α) es **negativo** para todo valor de **y**, la forma degenerada de esta cónica no tiene representación en el plano cartesiano, pues es el **vacío**.

PROBLEMA 11 (Material de estudio, ejercicio 299)

Determine la naturaleza del lugar geométrico representado por la ecuación

$$144x^2 - 120xy + 25y^2 - 96x + 40y - 20 = 0$$

A) Una parábola

B) Dos rectas paralelas

C) Una elipse

D) Una recta

E) Dos rectas que se cortan

CLAVE: B

PROBLEMA 12

Determine la naturaleza del lugar geométrico representado por la ecuación

$$4x^2 - 12xy + 14y^2 - 20y + 20 = 0$$

A) Una elipse

B) Una parábola

C) Una hipérbola

D) Un punto

E) El vacío

CLAVE: D

PROBLEMA 13

Determine la naturaleza del lugar geométrico representado por la ecuación

$$5x^2 - 20xy + 26y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$$

A) Una elipse

B) Una parábola

C) Una hipérbola

D) Un punto

E) No tiene representación en el plano

CLAVE: E

PROBLEMA 14

Determine la naturaleza del lugar geométrico representado por la ecuación

$$6x^2 + 17xy + 12y^2 - 7x - 10y + 2 = 0$$

A) Una elipse

B) Una parábola

C) Una hipérbola

D) Dos rectas secantes

E) Dos rectas paralelas

CLAVE: D

PROBLEMA 15

Dada la ecuación de segundo grado en variables x e y ,

$$21x^2 - 12xy + 2y^2 - 12x + k = 0$$

Calcule el valor de k , para que la ecuación represente un punto en el plano.

A) -8 B) -4 C) 12 D) 16 E) 18 **CLAVE: C****PROBLEMA 16**

Dada la ecuación de segundo grado en variables x e y ,

$$4x^2 + k \cdot xy + k \cdot y^2 + 4x + 8y + 1 = 0$$

Calcule el valor de k , para que la ecuación represente dos rectas coincidentes en el plano.

A) -8 B) -4 C) 12 D) 16 E) 18 **CLAVE: D**

PROBLEMA 17

Las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $5x^2 - 6xy + y^2 = 7$, son:
 $L_1: y = m_1x$, $L_2: y = m_2x$. Calcule $|m_2 - m_1|$

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

CLAVE: C

PROBLEMA 18

Dada la ecuación de segundo grado en variables x e y ,
 $(\tan(20^\circ) \cdot x + \tan(10^\circ) \cdot y + 3)(k \cdot x + \tan(40^\circ) \cdot y + 4) = 7$; $k > 0$
Calcule el valor de k , para que se presente la degeneración de la curva.

A) $3\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}$

D) 1

E) $\sqrt{3}/3$

CLAVE: C

PROBLEMA 19

Dada la ecuación de segundo grado en variables x e y , $4x^2 - 4xy + 4y^2 - 7 = 0$. Al trasladar el origen de coordenadas al punto $O'(\text{sen}(10^\circ); \cos(20^\circ))$, la ecuación toma la forma:

$$\mathcal{E}: 4(x')^2 - 4(x')(y') + 4(y')^2 + D'(x') + E'(y') + F' = 0$$

Calcule el valor de F' .

A) -1

B) $-\sqrt{3}$

C) -3

D) -4

E) $-2\sqrt{3}$

CLAVE: D

PROBLEMA 20 (Material de estudio, ejercicio 300)

Mediante una rotación y traslación de los ejes coordenados, la ecuación de segundo grado en variables x e y , $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0$ Se transforma en $A(x'')^2 + B(y'')^2 = C$. Calcule el valor de $(A + C)/B$

A) $-\frac{9}{4}$

B) $-\frac{7}{4}$

C) $-\frac{5}{4}$

D) $-\frac{3}{4}$

E) $-\frac{1}{4}$

CLAVE: C

PROBLEMA 21 (EXAMEN ADMISIÓN UNI 2019-II)

La ecuación cuadrática $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6y + 3 = 0$, representa:

- A) Una elipse B) Una circunferencia C) Una hipérbola
D) Una recta E) Un punto

CLAVE: E**PROBLEMA 22 (EXAMEN ADMISIÓN UNI 2010 –I)**

Después de una rotación de ejes, la ecuación $5x^2 - 8xy + 5y^2 - 9 = 0$ representa una elipse cuyos focos tienen como coordenadas $F_1(a; b)$ y $F_2(c; d)$. Calcule $a \cdot c + b \cdot d$

- A) -8 B) -6 C) -4 D) 2 E) 5

CLAVE: A

PROBLEMA 23 (EXAMEN FINAL CEPRE UNI 2007 - II)

El punto $P(\sqrt{3}/2; 3/2)$ está sobre la curva de ecuación: $3x^2 + B \cdot xy + 2y^2 = 9$, $B \neq 0$. Determine la nueva ecuación de la curva después de haber rotado el sistema un ángulo θ en sentido antihorario; donde 2θ es el ángulo entre el eje X y el radio vector $\overrightarrow{OP}$.

A) $x^2 + y^2 = 36$

B) $3x^2 + y^2 = 36$

C) $x^2 + 3y^2 = 36$

D) $3x^2 + 14y^2 = 36$

E) $14x^2 + 6y^2 = 36$

CLAVE: E